Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Reihen.

Von KÁROLY TANDORI in Budapest.

Einleitung.

Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Raume $L^2(a, b)$ definiertes System von orthogonalen und normierten Funktionen und sei

(1)
$$K_n^r(t, x) = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \varphi_k(t) \varphi_k(x),$$

wo

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{n!}$$

ist. Die Lebesgueschen Funktionen

$$L_n^r(x) = \int_a^b |K_n^r(t, x)|\, dt$$

spielen in der Theorie der (C, r)-Summierbarkeit der Orthogonalreihen eine entscheidende Rolle.

Es sei nämlich

(2)
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$$

die Entwicklung einer Funktion $f(x) \in L^2(a, b)$, für welche also $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$ gilt. Sei ferner $E \subset [a, b]$ eine Menge von positivem Maß und $\{v_n\}$ eine monoton gegen Unendlich strebende Folge positiver Zahlen. S. KACZMARZ hat den folgenden Satz ausgesprochen:

Ist r eine positive ganze Zahl und ist $L_n^r(x) \leqq v_n^2$ auf der Menge E, gilt außerdem auch

(3)
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 v_k^2 < \infty,$$

so ist die Orthogonalreihe (2) *in E fast überall* $(C, \alpha > 0)$*-summierbar*[1]).

[1]) S. KACZMARZ, Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia Math.*, 1 (1929), S. 100—103; Notes on orthogonal series I., *ebenda*, 5 (1934), S. 26—28.

Die Beweisführung von KACZMARZ scheint aber insofern eine gewisse Lücke zu enthalten, da KACZMARZ sich wesentlich auf die Bedingung stützt, daß man eine Indizesfolge $\{n_k\}$ finden kann derart, daß für *alle* ganze k die Beziehung $k \leqq v_{n_k}^2 < k+1$ gilt; diese Bedingung ist aber unter der einzigen Annahme, daß $\{v_n\}$ monoton gegen Unendlich wächst, im allgemeinen nicht erfüllt. S. KACZMARZ beweist also tatsächlich etwas weniger, als es im Satze ausgesprochen wird. Wir werden jedoch zeigen, daß der Kaczmarzsche Satz auch in seiner ursprünglichen Fassung, ohne der im Beweis auftretenden einschränkenden Annahme richtig ist. Dabei hat unser Beweis den relativen Vorteil, daß wir nur mit Cesàroschen Mittel rechnen, wogegen KACZMARZ auch zum Beweis des etwas engeren Satzes die Heranziehung der Rieszschen typischen Mittel benötigt. Auch die Annahme, daß r eine ganze Zahl sei, scheint überflüssig zu sein.

Da nach einem Kaczmarz—Zygmundschen Satz[2]) für die Entwicklungen der L^2-integrierbaren Funktionen die Konvergenz der $(C, \alpha>0)$-Mittel verschiedener Ordnung untereinander fast überall gleichwertig sind, genügt zu zeigen, daß die Reihe (2) unter den Voraussetzungen des Satzes für $r=1, 2, \ldots$ fast überall (C, r)-summierbar ist, für nicht ganze r aber die Reihe (2) fast überall (C, r')-summierbar ist, wo r eine ganze Zahl $> r$ bedeutet.

1. Hilfssätze über Cesàrosche Mittel.

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine beliebige Zahlenreihe. Unter dem n-ten (C, α)-Mittel versteht man die Summe

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha c_k.$$

Es ist bekannt[3]), daß für die Koeffizienten A_n^α die folgenden Beziehungen gelten:

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!} \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \qquad \alpha \neq -1, -2, \ldots; \tag{4}$$

$$A_l^\alpha - A_{l-1}^\alpha = A_l^{\alpha-1}; \tag{5}$$

$$A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha A_k^\beta; \tag{6}$$

$$A_l^\alpha = 0, \quad l = -1, -2, \ldots; \tag{7}$$

$$A_0^\alpha = 1; \tag{8}$$

$$A_l^{-1} = 0, \quad l \neq 0; \tag{9}$$

$$A_{n+1}^\alpha > A_n^\alpha > 0, \quad \alpha > -1. \tag{10}$$

---

[2]) S. KACZMARZ, Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen, *Math. Zeitschrift*, **23** (1925), S. 263–270; A. ZYGMUND, Une remarque sur un théorème de M. Kaczmarz, *Math. Zeitschrift*, **25** (1926), S. 297–298.

[3]) Siehe z. B. A. ZYGMUND, *Trigonometrical series* (Warszawa—Lwów, 1935), S. 41–43

Hierbei bedeuten α, β belibige reelle Zahlen, l eine ganze und n eine natürliche Zahl.

Mit Hilfe der Summen

$$s_n^0 = c_0 + c_1 + \ldots + c_n, \quad s_n^k = s_0^{k-1} + s_1^{k-1} + \ldots + s_n^{k-1} \tag{11}$$

läßt sich σ_n^k in der Form

$$\sigma_n^k = \frac{s_n^k}{A_n^k} \tag{12}$$

darstellen, ferner besteht auch die folgende Beziehung:

$$\sigma^{\alpha+\beta} = \frac{1}{A_n^{\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha. \tag{13}$$

Hilfssatz 1. *Sind p, q und r natürliche Zahlen $j = \min(p, q)$, so gilt*

$$\sum_{k=0}^{j} A_{p-k}^r A_{q-k}^r c_k = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{\mu} \left(\sum_{k=0}^{\min(j,(q-\mu)^+)} \sigma_k^r A_k^r A_{p-k}^{r-\mu} A_{q-k-\mu}^{\mu-1} \right), \tag{14}$$

wo $(q-\mu)^+$ den positiven Teil von $q-\mu$ bedeutet.

Mit einer Abelschen Transformation erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{j} A_{p-k}^r A_{q-k}^r c_k = \sum_{k=0}^{j-1} s_k^0 \Delta^1 (A_{p-k}^r A_{q-k}^r) + s_j^0 A_{p-j}^r A_{q-j}^r,$$

wo

$$\Delta^1 (A_{p-k}^r A_{q-k}^r) = A_{p-k}^r A_{q-k}^r - A_{p-k-1}^r A_{q-k-1}^r.$$

Wegen $j = \min(p, q)$ und (7) ist $A_{p-j-1}^r A_{q-j-1}^r = 0$, daher $A_{p-j}^r A_{q-j}^r = \Delta^1 (A_{p-j}^r A_{q-j}^r)$, folglich

$$\sum_{k=0}^{j} A_{p-k}^r A_{q-k}^r c_k = \sum_{k=0}^{j} s_k^0 \Delta^1 (A_{p-k}^r A_{q-k}^r).$$

Wenn wir dieses Verfahren r-mal wiederholen und die Bezeichnung

$$\Delta^{\mu+1} (A_{p-k}^r A_{p-k}^r) = \Delta^\mu (A_{p-k}^r A_{q-k}^r) - \Delta^\mu (A_{p-k-1}^r A_{q-k-1}^r)$$

einführen, so folgt wegen $j = \min(p, q)$ und (7): $\Delta^\mu (A_{p-j-1}^r A_{q-j-1}^r) = 0$, also $\Delta^\mu (A_{p-j}^r A_{q-j}^r) = \Delta^{\mu+1} (A_{p-j}^r A_{q-j}^r)$ für alle μ, weshalb sich

$$\sum_{k=0}^{j} A_{p-k}^r A_{q-k}^r c_k = \sum_{k=0}^{j} s_k^r \Delta^{r+1} (A_{p-k}^r A_{q-k}^r) \tag{15}$$

ergibt. Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\Delta^{r+1} (A_{p-k}^r A_{q-k}^r) = \sum_{\mu=0}^{r+1} \binom{r+1}{\mu} \Delta^\mu (A_{p-k}^r) \Delta^{r+1-\mu} (A_{q-k-\mu}^r).$$

Beachten wir (5), so erhalten wir

$$\Delta^{r+1} (A_{p-k}^r A_{q-k}^r) = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{\mu} A_{p-k}^{r-\mu} A_{q-k-\mu}^{\mu-1}.$$

Setzen wir diesen Wert in (15) ein und beachten dabei (12), so folgt durch Umkehrung der Summierung nach den Indizes k und μ:

$$\sum_{k=0}^{j} A_{p-k}^{r} A_{q-k}^{r} c_k = \sum_{\mu=0}^{r+1} \binom{r+1}{\mu} \left(\sum_{k=0}^{j} \sigma_k^{r} A_k^{r} A_{p-k}^{r-\mu} A_{q-k-\mu}^{\mu-1} \right).$$

Da nach (7) $A_{q-k-\mu}^{\mu-1} = 0$, wenn $q-k-\mu < 0$, so genügt es bei der Summation nach k nur jene Glieder zu beachten, für welche $k \leqq (q-\mu)^+$. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Seien $\{\lambda_n\}$ eine beliebige Zahlenfolge ($\lambda_n \neq 0$), r eine natürliche Zahl, $\Delta\left(\frac{1}{\lambda_s}\right) = \frac{1}{\lambda_s} - \frac{1}{\lambda_{s+1}}$, und $\sigma_k^{*\mu}$ das n-te (C, μ)-Mittel der Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_k. \tag{17}$$

Dann gilt

$$\sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \sigma_k^{*0} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \sum_{\mu=1}^{r} \frac{1}{A_n^r} \left(\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^{\mu} \sigma_k^{*\mu} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right)\right) + \frac{\sigma_n^{*r}}{\lambda_{n+r+1}}. \tag{16}$$

Mittels einer Abelschen Transformation ergibt sich

$$\sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k} c_k \lambda_k = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n-1} s_k^{*0} \Delta\left(\frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k}\right) + s_n^{*0} \frac{A_{n-n}^r}{A_n^r \lambda_n}.$$

Wegen (7) ist wieder $\frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k} = \Delta\left(\frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k}\right)$ für $k=n$, mithin

$$\sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} s_k^{*0} \Delta\left(\frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k}\right).$$

Da

$$\Delta\left(\frac{A_{n-k}^r}{\lambda_k}\right) = A_{n-k}^r \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \frac{1}{\lambda_{k+1}} \Delta(A_{n-k}^r),$$

man kann auf Grund von (5) schreiben:

$$\sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r s_k^{*0} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-1} s_k^{*0} \frac{1}{\lambda^{k+1}}.$$

Wenden wir auf das rechts stehende zweite Glied wieder die Abelsche Transformation an, so folgt genau wie früher:

$$\frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-1} s_k^{*0} \frac{1}{\lambda_{k+1}} = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-1} s_k^{*1} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) + \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-2} s_k^{*1} \frac{1}{\lambda_{k+2}},$$

also

$$\sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r s_k^{*0} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-1} s_k^{*1} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) + \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-2} s_k^{*1} \frac{1}{\lambda_{k+2}}.$$

Wenn wir die Abelsche Transformation auf das letzte Glied auf der obigen

Weise noch $(r-1)$-mal anwenden, so erhalten wir

$$\sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r s_k^{*0} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \sum_{\mu=1}^{r} \left(\frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} s_k^{*\mu} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{-1} s_k^{*r} \frac{1}{\lambda_{k+r+1}},$$

wo die $s_n^{*\mu}$ der Reihe (17) nach der Muster von (11) zugeordneten Summen bedeuten, d. h.

$$s_n^{*0} = c_0\lambda_0 + c_1\lambda_1 + \cdots + c_n\lambda_n, \quad s_n^{*k} = s_0^{*k-1} + s_1^{*k-1} + \cdots s_n^{*k-1}.$$

Daraus ergibt sich nach (12), (8) und (9) die behauptete Beziehung (16).

Hilfssatz 3. *Sei $\{w_n\}$ eine monoton ins Unendliche wachsende positive Zahlenfolge und sei $E \subset [a, b]$ eine Menge von positivem Maß. Ist $L_n^\alpha(x) \leqq w_n$ auf der Menge E, so gilt auf E auch $L_n^{\alpha+\beta} \leqq w_n$ für alle $\beta \geqq 0$.*

Nach (1) und (13) ist

$$K_n^{\alpha+\beta}(t, x) = \frac{1}{A_n^{\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} A_k^\alpha K_k^\alpha(t, x)$$

Ferner ist $A_{n-k}^{\beta-1}$ nach (4), bzw., wenn $\beta = 0$ ist, nach (3) und (9) positiv. Daraus folgt

$$L_n^{\alpha+\beta}(x) = \int_a^b |K_n^{\alpha+\beta}(t, x)|\, dt \leqq \frac{1}{A_n^{\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} A_k^\alpha \int_a^b |K_n^\alpha(t, x)|\, dt.$$

Aus der Monotonität von $\{w_n\}$ ergibt sich auf Grund von (6) die Behauptung.

3. Sätze über die Cesàroschen Mittel der Orthogonalreihen.

Satz 1. *Es sei $E \subset [a, b]$ eine Menge von positivem Maß, $\{v_n\}$ eine monoton ins Unendliche wachsende positive Zahlenfolge und r eine natürliche Zahl. Ist $L_n^r(x) \leqq v_n^2$ auf E und ist*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < \infty,$$

so gilt auf E fast überall $\sigma_n^r(x) = O(v_n)$, wo $\sigma_n^r(x)$ das n-te (C, r)-Mittel der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \varphi_k(x)$$

bedeutet[4]).

[4]) Diesen Satz hat S. Kaczmarz mit der Benützung der Rieszschen typischen Mittel bewiesen (l. c. erste Arbeit, S. 113—118). Unser Beweis ist ähnlich zu dem Kaczmarzschen, aber hier rechnen wir nur mit Cesàroschen Mitteln. Der Grundgedanke der Beweisführung stammt von A. Kolmogoroff, G. Seliverstoff und A. Plessner [siehe A. Kolmogoroff et G. Seliverstoff, Sur la convergence des séries de Fourier, *Comptes Rendus Acad Sci. Paris,* **178** (1925), S. 303—305; A Plessner, Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *Journal für die reine und angewandte Math.,* **155** (1925), S. 15–25].

Ohne Enschränkung der Allgemeinheit kann $b_0=0$ angenommen werden. Wir betrachten die Funktion

$$g_n(x)=\max_{0\leqq k\leqq n}\frac{\sigma_k^r(x)}{v_k}=\frac{\sigma_p^r(x)}{v_p},$$

wo $p=p(x,n)$ offenbar eine (ganzwertige) meßbare Funktion von n und x ist. Wegen $b_0=0$ ist $g_n(x)\geqq 0$. Wenn wir zeigen, daß die Folge

$$I_n=\int_E g_n(x)\,dx \qquad (n=1,2,\ldots)$$

unter einer von n unabhängigen Schranke bleibt, dann folgt nach einem bekannten Satz von B. LEVI[5]), daß die Folge der $g_n(x)$ auf E fast überall endlich bleibt, m. a. W., daß

$$\sigma_n^r(x)\leqq B_1(x)v_n \tag{18}$$

ist, wo $B_1(x)$ eine auf E fast überall endliche positive Funktion bedeutet.

Sei $f(x)$ eine quadratisch integrierbare Funktion, für welche

$$b_k=\int_a^b f(t)\varphi_k(t)\,dt \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

ist. Dann gilt

$$\sigma_n^r(x)=\int_a^b f(t)K_n^r(t,x)\,dt,$$

mithin

$$J_n=\int_E dx\int_a^b f(t)\frac{K_p^r(t,x)}{v_p}\,dt=\int_a^b dt\,f(t)\int_E\frac{K_p^r(t,x)}{v_p}\,dx.$$

Daraus folgt nach der Schwarzschen Ungleichung:

$$J_n^2\leqq\int_a^b f^2(t)\,dt\int_a^b\left[\int_E\frac{K_p^r(t,x)}{v_p}\,dx\right]^2 dt. \tag{19}$$

Es ist mit $q=p(y,n)$

$$\int_a^b\left[\int_E\frac{K_p^r(t,x)}{v_p}dx\right]^2 dt=\int_a^b dt\left[\int_E\frac{K_p^r(t,x)}{v_p}dx\int_E\frac{K_q^r(t,y)}{v_q}dy\right]=$$

$$=\int_E\int_E\int_a^b\frac{K_p^r(t,x)\,K_q^r(t,y)}{v_pv_q}\,dt\,dx\,dy,$$

wo wir zunächst nach t integrieren. Aus der Orthonormalität der Funktionen $\varphi_n(x)$ ergibt sich dann

$$J_n^2\leqq A\int_E\int_E\left\{\frac{1}{v_pv_q}\,\frac{1}{A_p^r}\,\frac{1}{A_q^r}\sum_{k=0}^{j}A_{p-k}^rA_{q-k}^r\varphi_k(x)\varphi_k(y)\right\}dx\,dy,$$

---

[5]) Siehe z. B. S. KACZMARZ - H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa-Lwów, 1935), S. 8.

wo $j = \min(p, q)$ und $A = \int_a^b f^2(t)\,dt$ bedeutet. Wir haben zu zeigen, daß dieses Doppelintegral unter einer von n unabhängigen Schranke bleibt.

Setzen wir in der Formel (14) $c_k = \varphi_k(x)\varphi_k(y)$, so läßt sich dieses Integral in der Form

$$\int_E\int_E \frac{1}{v_p v_q}\frac{1}{A_p^r}\frac{1}{A_q^r}\left[\sum_{\mu=0}^{r+1}\binom{r+1}{\mu}\left(\sum_{k=0}^{\min(j,(q-\mu)^+)} K_k^r(x,y) A_k^r A_{p-k}^{r-\mu} A_{q-k-\mu}^{\mu-1}\right)\right] dx\,dy$$

schreiben. Wegen der Annahme $b_0 = 0$ ist $K_0^r(x,y) \equiv 0$, also genügt über k nur von 1 zu summieren, daher ist

$$(20)\qquad J_n^2 \leqq A \sum_{\mu=0}^{r+1}\binom{r+1}{\mu}\int_E\int_E \frac{1}{v_p v_q}\left(\sum_{k=1}^{\min(j,(q-\mu)^+)} |K_k^r(x,y)|\,A_k^r\,\frac{A_{p-k}^{r-\mu}}{A_q^r}\,\frac{A_{q-k-\mu}^{\mu-1}}{A_q^r}\right) dx\,dy.$$

Wir dürfen hier $p \neq 0$, $q \neq 0$ auf der Produktmenge $E \times E$ annehmen, da im entgegengesetzten Fall der Integrand verschwindet.

Wir betrachten nun jedes Glied der in (20) stehenden Summe einzeln ohne den Faktor $\binom{r+1}{\mu}$:

$$(21)\qquad \int_E\int_E \frac{1}{v_p v_q}\left(\sum_{k=1}^{\min(j,(q-\mu)^+)} |K_k^r(x,y)|\,A_k^r\,\frac{A_{p-k}^{r-\mu}}{A_p^r}\,\frac{A_{q-k-\mu}^{\mu-1}}{A_q^r}\right) dx\,dy.$$

Ist $0 < \mu < r+1$, so kann die asymptotische Abschätzung (4) und (8) angewendet werden, wonach das Produkt

$$\frac{A_{p-k}^{r-\mu}}{A_p^r}\,\frac{A_{q-k-\mu}^{\mu-1}}{A_q^r}$$

folgenderweise abgeschätzt werden kann:

1° Es ist $O\left(\frac{(p-k)^{r-\mu}}{p^r}\,\frac{(q-k-\mu)^{\mu-1}}{q^r}\right)$, wenn $1 \leqq k < \min(j,(q-\mu)^+)$;

2° Es ist $O\left(\frac{(p-k)^{r-\mu}}{p^r}\,\frac{1}{q^r}\right)$, wenn $1 \leqq k = \min(j,(q-\mu)^+) = q-\mu$;

3° Es ist $O\left(\frac{1}{p^r}\,\frac{(q-k-\mu)^{\mu-1}}{q^r}\right)$, wenn $1 \leqq k = \min(j,(q-\mu)^+) = p$.

In allen drei Fällen ist also

$$\frac{A_{p-k}^{r-\mu}}{A_p^r}\,\frac{A_{q-k-\mu}^{\mu-1}}{A_q^r} = O\left(\frac{1}{j^{r+1}}\right) \qquad (0 < \mu < r+1).$$

Dann ist aber das Integral (21) nicht größer als

$$A_1 \int_E\int_E \frac{1}{v_p v_q}\,\frac{1}{j^{r+1}} \sum_{k=1}^{\min(j,(q-\mu)^+)} |K_k^r(x,y)|\,k^r\,dx\,dy \leqq A_1 \int_E\int_E \frac{1}{v_j^2}\,\frac{1}{j^{r+1}}\sum_{k=1}^{j} |K_k^r(x,y)|\,k^r\,dx\,dy,$$

wo A_1 eine absolute Konstante bedeutet. Wegen $j=\min(p,q)$ ist weiter das Integral (21) nicht größer als

$$2A_1\int\limits_E\int\limits_E \frac{1}{v_p^2}\frac{1}{p^{r+1}}\sum_{k=1}^{p}|K_k^r(x,y)|k^r\,dx\,dy\leqq$$

(22)

$$\leqq 2A_1\int\limits_E \frac{1}{v_p^2}\frac{1}{p^{r+1}}\left(\sum_{k=1}^{p}k^r\int\limits_a^b|K_k^r(x,y)|\,dy\right)dx\leqq 2A_1\int\limits_E\frac{1}{p^{r+1}}\sum_{k=1}^{p}k^r\,dx=O(1),$$

da nach Annahme $L_k^r(x)=\int\limits_a^b|K_k^r(x,y)|\,dy\leqq v_k^2$ und die Folge $\{v_n\}$ monoton zunehmend ist.

Es bleibt noch übrig die zu den Indizes $\mu=0$ und $\mu=r+1$ gehörenden Glieder der Summe (20) abzuschätzen. Es ist leicht zu zeigen, daß diese auch unter einer von n unabhängigen Schranke bleiben. Für $\mu=0$ haben wir den Ausdruck

$$\frac{1}{v_p v_q}\sum_{k=1}^{\min(j,q)}|K_k^r(x,y)|\,A_k^r\,\frac{A_{p-k}^r}{A_p^r}\,\frac{A_{q-k}^{-1}}{A_q^r},\tag{23}$$

dieser verschwindet nach (9) für $j\neq q$, und für $j=q$ ist er nach (8), (9), (10) nicht größer als

$$\frac{1}{v_j^2}|K_j^r(x,y)|.$$

Allerdings ist also das über $E\times E$ erstreckte Doppelintegral von (23) nicht größer als

$$2\int\limits_E\frac{dx}{v_p^2}\int\limits_a^b|K_p^r(x,y)|\,dy=O(1).$$

Auf derselben Weise läßt sich die von n unabhängige Beschränktheit des zum Index $\mu=r+1$ gehörenden Gliedes von (20) zeigen. Daraus und aus (22) folgt die gleichmäßige Beschränktheit der rechten Seite von (20), w. z. b. w.

Wenn wir dieses Verfahren auf die Funktionen

$$\bar g_n(x)=\max_{0\leqq k\leqq n}\left(-\frac{\sigma_k^r(x)}{v_k}\right)$$

anwenden, dann ergibt sich, daß die Folge $\{\bar g_n(x)\}$ fast überall auf E endlich ist; daher ist

$$\sigma_n^r(x)\geqq B_2(x)v_n,$$

wo $B_2(x)$ eine auf E fast überall endliche und negative Funktion ist. Daraus und aus (18) folgt unsere Behauptung.

Satz 2. *Sei $E\subset[a,b]$ eine Menge von positivem Maß, $\{v_n\}$, $\{\lambda_n\}$ monoton gegen Unendlich konvergierende, positive Zahlenfolgen und $v_n=o(\lambda_n)$*

Bezeichne $\sigma_n^{*r}(x)$ für ganze positive r das n-te (C, r)-Mittel der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k \varphi_k(x). \tag{24}$$

Ist $\sigma_n^{*r}(x) = O(v_n)$ auf E fast überall und gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \lambda_k^2 < \infty, \tag{25}$$

so ist die Reihe (2) *auf E fast überall (C, r) summierbar.*

Bezeichne $\sigma_n^r(x)$ das n-te (C, r)-Mittel der Reihe (2); es ergibt sich aus dem Hilfssatze 2, wenn man darin $c_k = a_k \varphi_k(x)$ setzt,

$$\sigma_n^r(x) = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \sigma_k^{*0}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + \tag{26}$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{r} \frac{1}{A^r} \left(\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^\mu \sigma_k^{*\mu}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right)\right) + \frac{\sigma_n^{*r}(x)}{\lambda_{k+r+1}}.$$

Aus dieser Formel ausgehend zeigen wir, daß auf E fast überall die Beziehung

$$\sigma_n^r(x) = \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r \sigma_k^{*0}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + o(1) \tag{27}$$

besteht. Zunächst ist es klar, daß das dritte Glied auf der rechten Seite von (26) auf E fast überall gegen 0 konvergiert.

Wir betrachten nun ein Glied der zweiten Summe in (26):

$$\frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^\mu \sigma_k^{*\mu}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right).$$

Wir zeigen, daß diese Summe fast überall gegen 0 konvergiert.[6]) Die Summe

$$\frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^\mu \sigma_k^{*\mu}(x) \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right)$$

ist fast überall endlich. Sie ist nämlich wegen (4) sicher nicht größer als

$$\sum_{k=0}^{n} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right),$$

und die Endlichkeit der rechten Seite folgt fast überall aus dem erwähnten B. Levischen Satz, da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) \int_a^b |\sigma_k^{*\mu}(x)|\, dx \leq \sqrt{b-a} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) \sqrt{\int_a^b (\sigma_k^{*\mu}(x))^2 dx} \leq$$

$$\leq \sqrt{b-a} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) \sqrt{\sum_{l=0}^{k} \left(\frac{A_{k-l}^\mu}{A_k^\mu}\right)^2 a_l^2 \lambda_l^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{b-a} \sqrt{\sum_{l=0}^{\infty} a_l^2 \lambda_l^2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) < \infty$$

[6]) Die Idee der Beweisführung stammt von G. ALEXITS.

ist, wo wir die aus (10) folgende Beziehung $A_{k-1}^{\mu}/A_k^{\mu} \leq 1$ beachtet haben.

Offenbar ist $\Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right)=\frac{1}{\xi_k}\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right)$, wo $\xi_k \leq \xi_{k+1} \to \infty$. Sei $\varepsilon>0$ beliebig und es sei $x \in [a, b]$ ein Punkt, in welchem

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right)=M<\infty$$

besteht. Wählen wir ν so groß, daß $\frac{1}{\xi_n} \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ für $n>\nu$, so gilt bei Beachtung von (4) für genügend große n:

$$\left|\frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^{\mu} \sigma_k^{*\mu}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{\nu} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^{\mu} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right)+\sum_{k=\nu+1}^{n} \frac{1}{\xi_k} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{\nu} A_{n-k}^{r-\mu} A_k^{\mu} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\lambda_{k+\mu}}\right)+\frac{1}{\xi_{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} |\sigma_k^{*\mu}(x)| \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+\mu}}}\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .$$

Damit ist gezeigt, daß jedes Glied der zweiten Summe (26) fast überall gegen 0 strebt, folglich ist (27) richtig. Auf Grund von (27) läßt sich also auf E fast überall

$$\sigma_m^r(x)-\sigma_n^r(x)=\frac{1}{A_m^r} \sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{r} \sigma_k^{*0}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)-\frac{1}{A_n^r} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{r} \sigma_k^{*0}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)+o(1) \tag{28}$$

schreiben. Da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) \int_a^b |\sigma_k^{*0}(x)| dx \leq$$

$$\leq \sqrt{b-a} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) \sqrt{\int_a^b (\sigma_k^{*0}(x))^2 dx} \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \lambda_k^2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)<\infty,$$

es ergibt sich nach dem öfters erwähnten Levischen Satz die Konvergenz fast überall der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^{*0}(x) \Delta\left(\frac{1}{\lambda_k}\right). \tag{29}$$

Daraus folgt, daß auch die in (28) rechst stehende Differenz fast überall gegen 0 konvergiert, da diese nichts anderes, als die Differenz der m-ten und n-ten (C, r)-Mittel $(r>0)$ der Reihe (29) ist. Est gilt also auf E fast überall $\sigma_m^r(x)-\sigma_n^r(x) \to 0$, womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

S a t z 3. *Ist $r>0$ beliebig und $L_n^r(x) \leq v_n^2$ auf der Menge E, gilt außerdem* (3), *so ist die Orthogonalreihe* (2) *auf E fast überall $(C, \alpha>0)$-summierbar.*

Aus (3) folgt nämlich die Existenz einer monoton gegen Unendlich konvergierenden, positiven Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ mit $v_n = o(\lambda_n)$ derart, daß auch (25) besteht. Z. B. ist

$$\lambda_k = v_k \Big/ \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu^2 v_\nu^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

eine derartige Folge. Es folgt aus Satz 1 für ganze $r > 0$, daß auf E fast überall $\sigma_n^{*r}(x) = O(v_n)$ ist; aus Satz 2 folgt dann die (C, r)-Summierbarkeit der Reihe (2) auf E fast überall. Ist r nicht ganz, so gibt es nach dem Hilfssatze 3 ein ganzes $r' > r$ mit

$$L_n^{r'}(x) \leqq v_n^2$$

auf E und es folgt dann nach Satz 2 die (C, r')-Summierbarkeit auf E fast überall.

Damit ist alles Angekündigte bewiesen.

Wir bemerken endlich, daß *alle unsere Beweise auch für den Fall* $r = 0$, *d. h. für die gewöhnliche Konvergenz gelten.* Damit ist also auch dieser Fall erledigt, den S. KACZMARZ abgesondert behandelt[7]). Übrigens enthält sein Beweis auch für diesen Fall eine ähnliche Lücke, wie im Falle der (C, α)-Summierbarkeit positiver Ordnung.

III. MATHEMATISCHES KATHEDER,
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST.

(Eingegangen am 2. Juni 1951.)

[7]) l. c. (1), erste Arbeit, S. 100—103.